

### مبرهنة:

إذا كان الفضاء الطوبولوجي  $X$  محدوداً ثانياً فإنه يمتلك مجموعة كثيفة قابلة للعد «أي أنه فصول أو انفصالي».

### البرهان:

بما أن  $X$  محدود ثانياً يجب التبريد هو يمتلك قاعدة قابلة للعد ولكن أسرة المجموعات المفتوحة  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  نختار من كل مجموعة  $U_n$  نقطة  $x_n$  متصل مع المجموعة  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

وهي مجموعة قابلة للعد وهذه المجموعة كثيفة لأنها تقاطع مع جميع المجموعات المفتوحة غير الخالية كون  $U_n$  قاعدة وهو المطلوب

### \* موضوعات الفصل:

هناك عدة موضوعات للفصل لندرس الثلاثة الأولى منها

#### 1- موضوعة الفصل الصفريّة $T_0$ :

وهي أنه من أجل أي نقطتين مختلفتين من فضاء طوبولوجي يوجد جداهما جوار لا يحتوي النقطة الأخرى. إن الفضاء الذي يحقق هذه الموضوعية نسميه «فضاء  $T_0$ » أو أحياناً يسمى فضاء «كلما غورون»

#### مثال (1):

ليكن لدينا الفضاء  $X = \{a, b\}$  ،  $\tau = \{\emptyset, X\}$

في هذا الفضاء  $a$  جوار وحيد هو  $X$



وحيث أن  $L$  جوار  $a$  وحيد هو  $X$   
وبالتالي هذا الفضاء ليس  $T_0$  فضاء

ملاحظة:

بما أنه توجد فضاءات ليس  $T_0$  فضاء فإنَّ للتعريف معنا  
لكن نلاحظ أن الفضاءات التي ليس  $T_0$  فضاء ليس لها  
أهمية من الناحية العملية.

مثال (2)

ليكن لدينا الفضاء  $X = \{a, b\}$   $T = \{\emptyset, \{a\}, X\}$   
هذا الفضاء  $T_0$  فضاء لأنه يكفي أنه يوجد جوار  
لأحد النقاط لا يحوي النقطة الأخرى  
نلاحظ أن  $a$  ليس جوار  $\{a\}$  لا يحوي النقطة  $b$

الفضاء  $T_0$  مكافئان سندخر أحدهما من خلال البرهنة التالية

برهنة:

ليكن  $X$  فضاء طوبولوجي. إنَّ القضيّتين الآتيتين متكافئتان

1-  $X$  هو  $T_0$  فضاء

2-  $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$  من أجل أي نقطتين  $x, y$  من  $X$

البرهان:

1  $\leftarrow$  2

نفرض  $x, y$  نقطتان من  $X$  بحيث  $x \neq y$ ، فنوجد جوارهما  
وتكن النقطة  $x$  جوار لا يحوي النقطة  $y$  وهذا يعني  
أن  $x \notin \overline{\{y\}}$  وكن  $x \in \overline{\{x\}}$ ، وبالتالي  $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$



1 ← 2

نقرضنا أن الشرط وفق أي  $\overline{ax} \neq \overline{ay}$   
 ولقرضنا جدلاً أن الفضاء  $X$  ليس  $T$  فضاء هذا يعني أن  
 أي جوار لـ  $x$  يحوي  $y$  وأي جوار لـ  $y$  يحوي  $x$   
 وهذا يعني أن

$$\overline{ax} \subseteq \overline{ay} \text{ , } \overline{ay} \subseteq \overline{ax} \text{ أي أن } \overline{ax} = \overline{ay}$$

وهذا يناقضنا الفرضنا أي أن الفرض الجدي  
 خاطئ وبالتالي الفضاء  $X$  هو  $T$  فضاء.

بالعودة إلى المثالين السابقين:

$$X = \{a, b\} \text{ , } T = \{\emptyset, X\}$$

هنا نجد أن  $\overline{a} = X$  كما أن  $\overline{b} = X$  أي أن  
 $\overline{b} = \overline{a}$   
 والفضاء ليس  $T$  فضاء.

$$X = \{a, b\} \text{ , } T = \{\emptyset, \{a\}, X\}$$

هنا نجد  $X = \overline{a}$   $\overline{b} = \{b\}$   $\overline{a} \neq \overline{b}$   
 لذا فضاء مغلق



## 2- موضوع الفصل الأول $T_1$ :

وهي أن من أجل أي نقطتين مختلفتين في فضاء طوبولوجي يوجد لكل منهما جوار لا يحوي النقطة الأخرى

إن الفضاء الذي يحقق هذه الموضوعه نطلق عليه اسم

( $T_1$  فضاء)

نتج  
من هذا الترتيب أنه موضوع الفصل الثماني  $T_2$  نتج من موضوعه  
الفصل الأول

«أي أن كل  $T_1$  فضاء هي  $T_2$  فضاء»  
والعكس غير صحيح

مثال:

$$T = \{\emptyset, \{a, x\}\} \quad X = \{a, b\}$$

لدينا

هذا الفضاء هو  $T_2$  فضاء ولكنه ليس  $T_1$  فضاء

لأنه: جوار  $a$  هو  $\{a\}$

لا يوجد جوار لـ  $\{a\}$  لا يحوي  $\{b\}$  لا يحوي  $b$

جوار  $b$  هو  $\{b\}$  لكن لا يوجد جوار لـ  $b$  لا يحوي  $a$

أي جوار لـ  $b$  « $X$  فقط» يحوي  $a$

مثال:

لنأخذ الفضاء المنقطع  $T(X, \tau)$  و  $T$  قوي

هذا الفضاء هو  $T_1$  فضاء لأن من أجل أي نقطتين مختلفتين

$x$  و  $y$  يوجد لـ  $x$  جوار هو  $\{x\}$  لا يحوي  $y$

لأنه على المجموعات مفتوحة ويوجد لـ  $y$  جوار هو  $\{y\}$  لا يحوي  $x$



### مثال

لو أخذنا  $R$  مجموعة الأعداد الحقيقية:

$$\mathcal{C} = \{u \in R \mid 1 \in u\} \cup \{\emptyset\}$$

لدينا حوار  $L$  هو  $\{x, y\}$  والمثل حوار  $L$  هو  $\{x, y\}$

والحوار الأول لا يحوي  $y$  والثاني لا يحوي  $x$

وذلك عندما  $x \neq y$

تكن إذا كان  $(x, y) \in \mathcal{C}$  عندئذ يكون حوار  $L$  هو  $\{x, y\}$

أي أن أي حوار  $L$  يحوي  $x$  عندئذ الفضاء

ليس  $T$  فضاء ولكنه  $T$  فضاء

للفضاء  $T$  مكافئات عدة سنأخذ أهمها:

### مبرهنة:

ليكن  $X$  فضاء طوبولوجي. إن القسيتين الآتيتين متكافئتان:

- 1-  $X$  هو  $T_1$  فضاء
- 2- المجموعة وحيدة العنصر لها مغلقة ومماثل  $x \in X$

### البرهان:

$$(1 \Rightarrow 2)$$

نصن نقطة  $x$  من الفضاء ولنبين أن المجموعة وحيدة العنصر هذه  
لها مغلقة.

لنم ذلك بإثبات أن مكملاً  $x$  مفتوحة أي  $X \setminus \{x\}$  مفتوحة

ولن ذلك نأخذ نقطة  $y$  من هذه المجموعة بطبيعة الحال أجب

$x \neq y$



بالترتيب

ولكن هذه النقطة  $y \in X \setminus \{x\}$   
يوجد جوار مفتوح  $U_y$  لا يحتوي على  $x$

لدينا:

$$X \setminus \{x\} = \bigcup \{U_y \mid y \in X \setminus \{x\}\} \subseteq X \setminus \{x\}$$

$$X \setminus \{x\} = \bigcup U_y$$



أي أننا تساوى اتحاد المجموعات المفتوحة  $U_y$  ومجموعة  $X \setminus \{x\}$  مفتوحة ومنه

فإن  $X \setminus \{x\}$  مفتوحة

(2)  $\leftarrow$  (1)

لنأخذ نقطتين مختلفتين  $y$  و  $x$  من  $X$  وبالفرض لدينا  $X \setminus \{x\}$  مفتوحة وكذلك الأمر بالنسبة لـ  $X \setminus \{y\}$  أي أن  $X \setminus \{y\}$  مفتوحة.

بالتالي  $X \setminus \{x\}$  مفتوحة وتحتوي  $y$  ومنه جوار  $U_y$  لا يحتوي على  $x$   
وأيضا  $X \setminus \{y\}$  مفتوحة وتحتوي  $x$  ومنه جوار  $U_x$  لا يحتوي على  $y$

وبالتالي فإن  $X$  هو (T<sub>2</sub> -فضاء)

نتيجة:

أي مجموعة منتهية من  $T_1$  فضاء هي مجموعة مفتوحة.



مثال:

ليكن  $X$  هو  $T_1$  فضاء و  $A$  مجموعة منتهية من  $X$   
 و  $x$  عنصر لا ينتمي إلى  $A$  عندها يوجد جوار للنقطة  $x$   
 لا يتقاطع مع  $A$

الحل:

لنأخذ المجموعة المنتهية  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  وليكن  $x \notin A$   
 بما أن الفضاء  $T_1$  عندها يوجد جوار  $U_1$  لـ  $x$  لا يحوي  $a_1$   
 ويوجد جوار  $U_2$  لـ  $x$  لا يحوي النقطة  $a_2$  وهكذا ...  
 $U_n$  جوار لـ  $x$  لا يحوي  $a_n$  بالتالي

$$U = \bigcap_{i=1}^n U_i$$

أي أن تقاطع الجوارات هو جوار لـ  $x$  ولا يتقاطع مع  $A$

مبرهنة:

ليكن  $X$  هو  $T_1$  فضاء و  $A$  مجموعة جزئية من  $X$  وكانت  $x$  نقطة  
 من الفضاء

تكون النقطة  $x$  نقطة تراكم للمجموعة  $A$  إذا وفقط إذا كان  
 أي جوار للنقطة يتقاطع مع  $A$  بعدد غير منته من العناصر

(2 ← 1)

البرهان:

إذا كان أي جوار للنقطة  $x$  يحوي مالا نهاية من عناصر  $A$  فبذلك  
 أن النقطة  $x$  هي نقطة تراكم

(1 ← 2)

لتفرض أن  $x$  هي نقطة تراكم للمجموعة  $A$  ولنفرض جدا أنه يوجد  
 جوار للنقطة  $x$  مثلا  $U$  بحيث أن تقاطعه مع  $A$  منته



$$V \cap A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

عندئذ يجب تمرين سابق يوجد جوار  $w$  لـ  $x$  بحيث أن

$$\{x\} \supseteq (V \cap A) \cap w = A \cap (V \cap w)$$

ولكن  $V \cap w$  هو جوار لـ  $x$  (تقاطع جوارين لـ  $x$ ) عندئذ

$$(V \cap w) \cap A / \{x\} = \emptyset$$

وهذا يعني أن  $x$  ليست نقطة تراكم وهذا يناقض الفرض

ملحظة:

في الفضاء  $T_1$  تكون النقطة اللاهيفة بالمجموعة  
إما نقطة تراكم - أو نقطة منفردة.

ملحظة:

تكون المجموعة حلقية إذا لم تكن مفتوحة.